บรรยายครั้งที่ 2

21 ธันวาคม 2554

เนื้อหา

- สเกลาร์และเวกเตอร์
- การบวกและลบเวกเตอร์
- การแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์
- การคูณเวกเตอร์

ดร.ภาณุวัฒน์ ชิมะลาวงศ์

ห้องพัก 2642 อาคาร 26 โทร 0-2942-6900-99 ต่อ 5018

Website: http://p-chimalawong.freevar.com/page/teaching.html

e-mail: p.chimalawong@gmail.com

เวกเตอร์และสเกลาร์ (Vector & Scalar)

ปริมาณต่างๆ ที่วัดในทางฟิสิกส์ **แบ่งออกเป็น 2 ประเภท**

❑ ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) คือ ปริมาณที่ระบุ**ขนาดเพียงอย่างเดียว**

เช่น มวล (kg), ระยะทาง (m), อัตราเร็ว (m/s), อุณหภูมิ (K), เวลา (s)

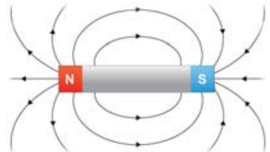


❑ ปริมาณเวกเตอร์ (vector) คือ ปริมาณที่ต้อง**ระบุทั้งขนาดและทิศทาง**พร้อมกัน

เช่น น้ำหนัก (N), การกระจัด (m), ความเร็ว (m/s), ความเร่ง (m/s^2), สนามไฟฟ้า (V/m), สนามแม่เหล็ก (T)

<u>ตัวอย่างเช่น</u> รถยนต์วิ่งด้วยความเร็ว 20 km/h ไปในทิศตะวันออก

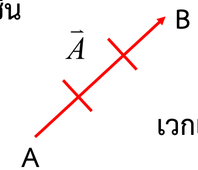
สนามแม่เหล็กขนาด 1 mT มีทิศพุ่งออกจากขั้วเหนือ



ปริมาณเวกเตอร์ (Vector)

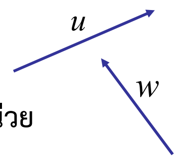
ปริมาณเวกเตอร์ โดยทั่วไปเขียนด้วยลูกศรที่มีความยาวเท่ากับขนาดของเวกเตอร์และมีทิศเดียวกับเวกเตอร์บนลูกศรจะมีอักษรย่อกำกับว่าเป็นเวกเตอร์ของปริมาณใด

เช่น



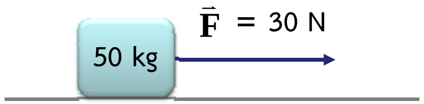
เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ นิยมเขียนสัญลักษณ์เป็น $\vec{A}$

เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีขนาด 3 หน่วย; → $|\vec{A}|$ = 3 หน่วย

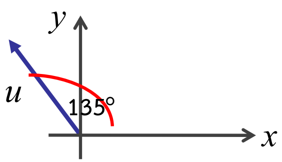


ตัวอย่างการบอกขนาดและทิศของเวกเตอร์

1) มีแรง $\vec{\mathbf{F}}$ ขนาด 30 N กระทำต่อวัตถุมวล 50 kg มีทิศไปทางขวา



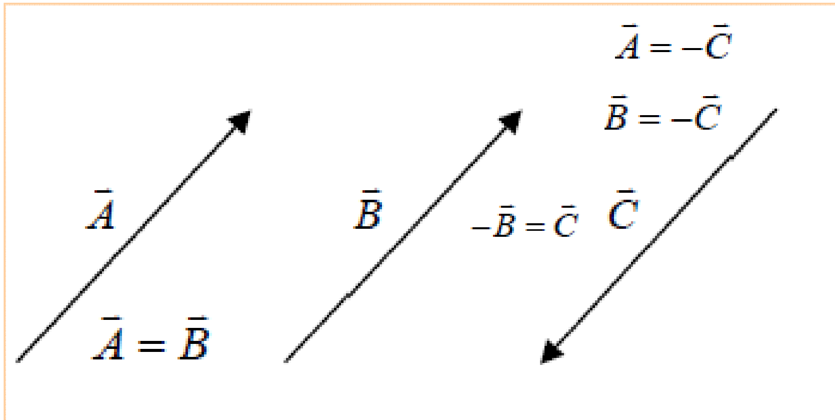
2) เวกเตอร์ u มีขนาด 2 cm มีทิศทำมุม 135° กับแกน x



การเท่ากันของเวกเตอร์

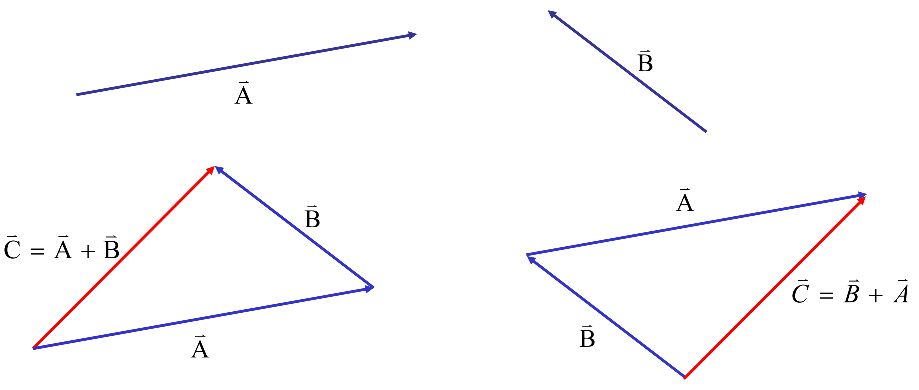
เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

เวกเตอร์นั้นมี**ขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน**



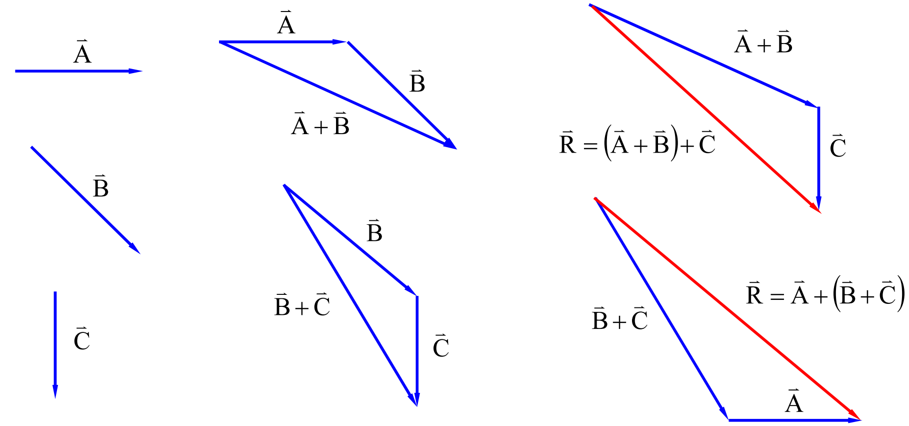
เวกเตอร์ $\vec{A} = -\vec{C}$ หมายความว่า เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน **แต่มีทิศตรงข้ามกัน**

การบวกเวกเตอร์ (Vector addition) วิธีสร้างภาพ (หัวต่อหาง)



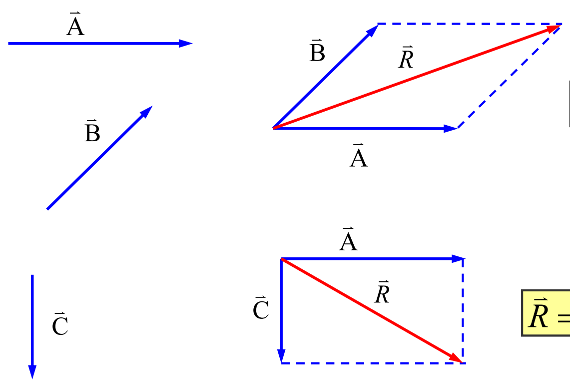
$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}}$ *"คุณสมบัติการสลับที่"*

การบวกเวกเตอร์ (Vector addition) วิธีสร้างภาพ (หัวต่อหาง)



$\boxed{(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})}$ *"คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม"*

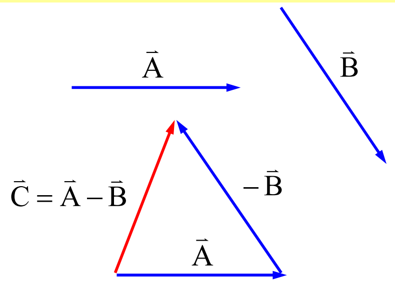
การบวกเวกเตอร์ (Vector addition) วิธีสร้างรูปเหลี่ยมปิด

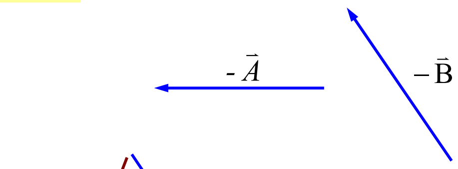


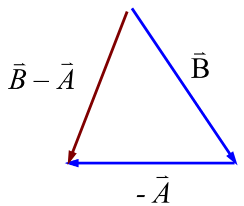
$\boxed{\vec{R} = \vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}}$

$\boxed{\vec{R} = \vec{A}+\vec{C} = \vec{C}+\vec{A}}$

การลบเวกเตอร์ (Vector subtraction)





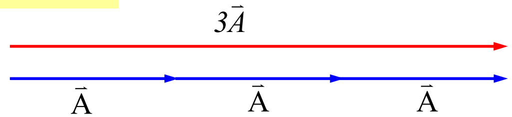


$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-\vec{A})$

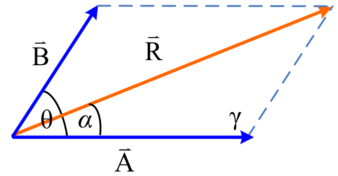
$\boxed{\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})}$

การคูณปริมาณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์

$$|s\vec{A}| = |s| \cdot |\vec{A}|$$



การหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

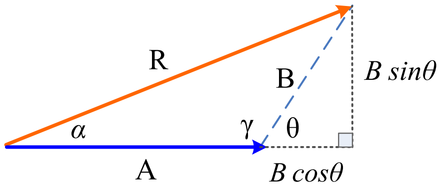
$$R^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

$$R^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta$$

กฎของโคไซน์ (Law of Cosine)

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

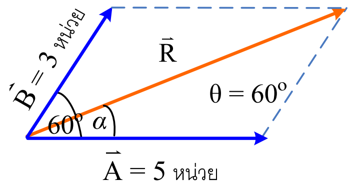


จากรูปจะได้ $\tan\alpha = \dfrac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$

ทิศของเวกเตอร์ลัพธ์

$$\boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}\right)}$$

ตัวอย่าง 2.1 เวกเตอร์ A ขนาด 5 หน่วย ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ B ขนาด 3 หน่วย ดังรูป จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



แนวคิด

ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

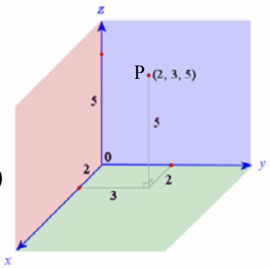
$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

$= 7$ หน่วย

ทิศของเวกเตอร์ลัพธ์ $\boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}\right)}$

$\rightarrow \alpha = 21.79^\circ$

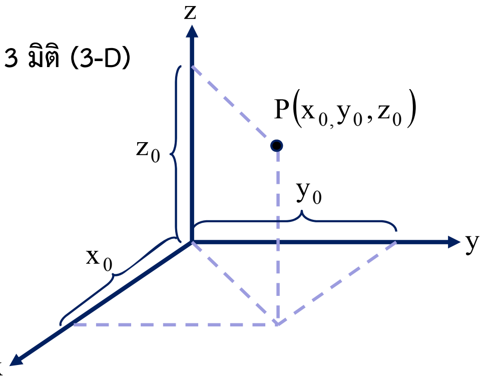
<u>Ans.</u> เวกเตอร์ลัพธ์ R มีขนาด 7 หน่วย ทำมุมกับเวกเตอร์ A เท่ากับ 21.79°



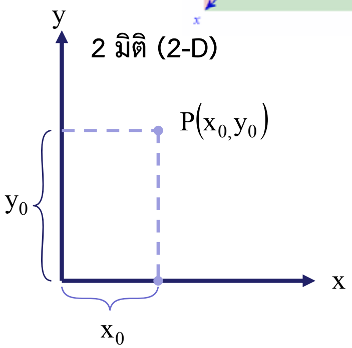
ระบบพิกัด (Coordinate system)

- ระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system)

3 มิติ (3-D)



2 มิติ (2-D)



P (2,3,5) จุด P อยู่ที่ตำแหน่งบนแกน x, y, z เท่ากับ 2, 3 และ 5 หน่วยตามลำดับ

P (2,3) จุด P อยู่ที่ตำแหน่งบนแกน x, y เท่ากับ 2 และ 3 หน่วย

ระบบพิกัด (Coordinate system)

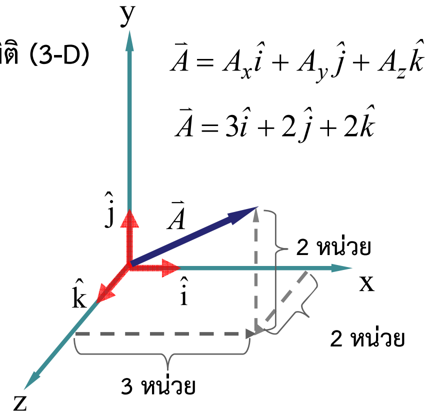
- การเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน

กำหนดเทอมเฉพาะขึ้นมาเพื่อบ่งบอกทิศทางซึ่งมีขนาดเท่ากับหนึ่งและไม่มีหน่วย เรียกว่า “เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector)” โดยใช้ สัญลักษณ์ “ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ”

3 มิติ (3-D)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

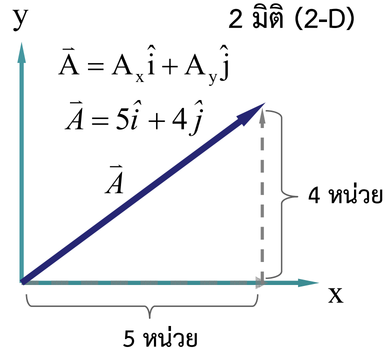
$$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$



2 มิติ (2-D)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$$



ตัวอย่าง 2.2 กำหนดเวกเตอร์ $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ และ $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

จงหา a) $\vec{A} + \vec{B}$ b) $\vec{A} - \vec{B}$ c) $3\vec{A} + 2\vec{B}$ d) $2\vec{A} - 3\vec{B}$

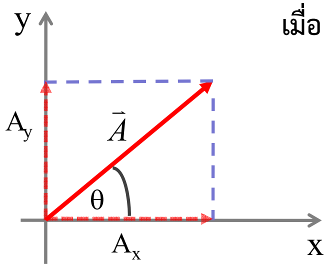
แนวคิด (a) $\vec{A} + \vec{B} = \left(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right) + \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}\right) = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

(b) $\vec{A} - \vec{B} = \left(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right) - \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}\right) = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

(c) $3\vec{A} + 2\vec{B} = 3\left(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right) + 2\left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}\right)$

(d) $2\vec{A} - 3\vec{B} = 2\left(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right) - 3\left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}\right)$

การแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ (Vector components)



เมื่อ A_x และ A_y คือเวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A}$

$\boxed{A_x = |\vec{A}|\cos\theta}$ ⇒ องค์ประกอบตามแนวแกน x

$\boxed{A_y = |\vec{A}|\sin\theta}$ ⇒ องค์ประกอบตามแนวแกน y

โดยที่ $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ และ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$

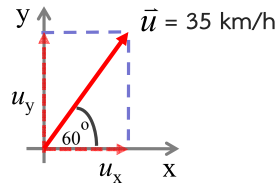
ตัวอย่าง 2.3 เวกเตอร์ $\vec{u}$ เป็นความเร็วของรถคันหนึ่งมีขนาด 35 km/h วิ่งอยู่บนพิกัด xy โดยทำมุม 60° กับแกน x จงหาองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ตามแนวแกน x และ y

แนวคิด $u_x = |\vec{u}|\cos\theta$

$= 17.5\ km/h$

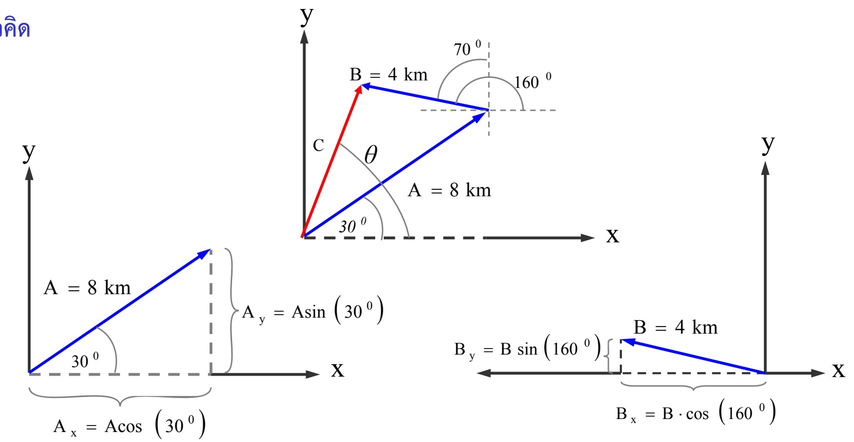
$u_y = |\vec{u}|\sin\theta$

$= 30.3\ km/h$



ตัวอย่าง 2.4 รถยนต์คันหนึ่งเริ่มเคลื่อนที่ทำมุม 30° กับทิศตะวันออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 8 กิโลเมตร และวิ่งต่อไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 70° กับทิศเหนือ เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของรถยนต์จากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้าย

แนวคิด



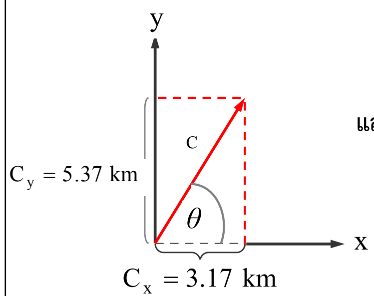
$A_x = A\cos\theta =$
$A_y = A\sin\theta =$

$B_x = B\cos\theta =$
$B_y = B\sin\theta =$

ตัวอย่าง 2.4 แนวคิด (ต่อ)

$A_x = A\cos\theta = 8.0\cos(30^o) = 6.93$ km
$A_y = A\sin\theta = 8.0\sin(30^o) = 4.0$ km

$B_x = B\cos\theta = 4.0\cos(160^o) = -3.76$ km
$B_y = B\sin\theta = 4.0\sin(160^o) = 1.37$ km



และได้เวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์ลัพธ์คือ

$C_x = A_x + B_x =$
$C_y = A_y + B_y =$

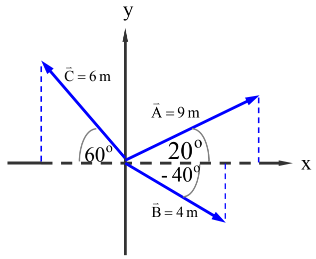
นั่นคือ $\vec{C} = 3.17\hat{i} + 5.37\hat{j}$

ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $|C| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} =$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) =$

Ans. เวกเตอร์ตำแหน่ง C มีขนาด 6.23 km ทำมุมกับทิศตะวันออก 59.4°

ตัวอย่าง 2.5 จงหาผลบวกของเวกเตอร์ต่อไปนี้



แนวคิด

$A_x = A\cos(\theta) = 9.0\cos(20^0) = 8.46$ m

$A_y = A\sin(\theta) = 9.0\sin(20^0) = 3.08$ m

$B_x = B\cos(\theta) = 4.0\cos(-40^0) = 3.06$ m

$B_y = B\sin(\theta) = 4.0\sin(-40^0) = -2.57$ m

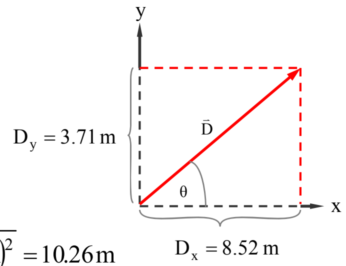
$C_x = C\cos(\theta) = 6.0\cos(120^0) = -3.0$ m

$C_y = C\sin(\theta) = 6.0\sin(60^0) = 5.2$ m.

เวกเตอร์ประกอบของเวกเตอร์ลัพธ์

$D_x = A_x + B_x + C_x = (8.46 + 3.06 - 3.0) = 8.52$ m

$D_y = A_y + B_y + C_y = (3.08 - 2.57 + 5.2) = 5.71$ m



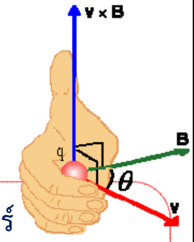
ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(8.52)^2 + (5.71)^2} = 10.26\,\text{m}$$

และ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.71}{8.52}\right) = 33.83^\circ$$

การคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ (Products of Vector)



เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใดๆ สามารถคูณกันได้ โดยแบ่งชนิดการคูณออกเป็น 2 ประเภท (ตามผลที่ได้จากการคูณ)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar product or dot product)

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

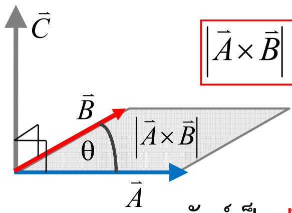
มุม θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ A และ B

ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector product or cross product)

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}}$$

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta}$$



ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

ตัวอย่าง 2.6 เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีขนาด 3 หน่วย และเวกเตอร์ $\vec{B}$ มีขนาด 4 หน่วย จงหา $\vec{A}\cdot\vec{B}$ เมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุมกัน 0°, 60°, 90°, 120° และ 180°

แนวคิด ผลคูณเชิงสเกลาร์ $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$

เมื่อ θ = 0° ; $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(4)\cos 0^\circ = (3)(4)(1)$ = 12 หน่วย

เมื่อ θ = 60° ; $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(4)\cos 60^\circ = (3)(4)(0.5)$ = 6 หน่วย

เมื่อ θ = 90° ; $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(4)\cos 90^\circ = (3)(4)(0)$ = 12 หน่วย

เมื่อ θ = 120° ;

เมื่อ θ = 180° ;

ตัวอย่าง 2.7 จงหาขนาดของ $\vec{A}\times\vec{B}$ เมื่อ $\vec{A}$ มีขนาด 4 หน่วย และเวกเตอร์ $\vec{B}$ มีขนาด 5 หน่วย โดยที่ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุมกัน 0°, 60°, 90°, 120° และ 180°

แนวคิด ขนาดของ $\vec{A}\times\vec{B}$ ⇨ $\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta}$

เมื่อ θ = 0° ; $|\vec{A}\times\vec{B}| = (4)(5)\sin 0^\circ = (4)(5)(0)$ = 0 หน่วย

เมื่อ θ = 60° ; $|\vec{A}\times\vec{B}| = (4)(5)\sin 60^\circ = (4)(5)(0.866)$ = 17.32 หน่วย

เมื่อ θ = 90° ; $|\vec{A}\times\vec{B}| = (4)(5)\sin 90^\circ = (4)(5)(1)$ = 20 หน่วย

เมื่อ θ = 120° ;

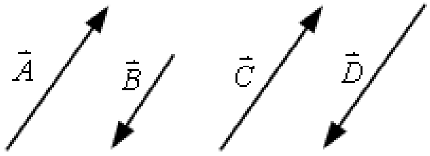
เมื่อ θ = 180° ;

ชื่อ-นามสกุล..รหัสนักศึกษา...กลุ่ม........................

Worksheet 2/2554	เรื่อง : เวกเตอร์	วิชา PHYS1301 ฟิสิกส์เบื้องต้น

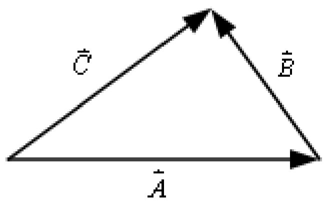
1. ปริมาณในข้อใดต่อไปนี้เป็นปริมาณเวกเตอร์ทั้งหมด
   (a) เวลา มวล อัตราเร็ว น้ำหนัก
   (b) น้ำหนัก เวลา ความเร่ง การกระจัด
   (c) การกระจัด สนามไฟฟ้า ระยะทาง ความเร่ง
   (d) ความเร็ว สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก ความเร่ง

2. จากรูปเวกเตอร์ต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง



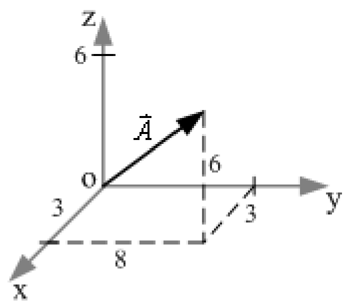
   (a) $\vec{A}$ เท่ากับ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$
   (b) $\vec{A}$ เท่ากับ $\vec{C}$ แต่ตรงข้ามกับ $\vec{D}$
   (c) $\vec{A}$ เท่ากับ $\vec{C}$ แต่ตรงข้ามกับ $\vec{B}$
   (d) $\vec{A}$ ไม่เท่ากับเวกเตอร์ใดเลย

3. จากรูป ข้อใดต่อไปนี้เป็นการรวมเวกเตอร์ที่ถูกต้อง



   (a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$
   (b) $\vec{A} - \vec{C} = \vec{B}$
   (c) $\vec{C} + \vec{B} = \vec{A}$
   (d) $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$

4. จากรูป ข้อใดคือเวกเตอร์ตำแหน่งของ $\vec{A}$



   (a) $6\hat{i} + 3\hat{j} + 8\hat{k}$
   (b) $3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$
   (c) $8\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$
   (d) $3\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$

5. กำหนดให้ $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ และ $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ จงแสดงการหาคำตอบในข้อต่อไปนี้

   5.1) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   5.2) $3\vec{A} - 4\vec{B}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

6. เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีขนาด 3 หน่วย และเวกเตอร์ $\vec{B}$ มีขนาด 4 หน่วย เวกเตอร์ทั้งสองทำมุมกัน 45° จงหา

   6.1) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   6.2) $|\vec{A} \times \vec{B}|$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....